ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Centres à l'étranger

Concours d'admission 1980

MATHEMATIQUES I - OPTION M

Trois pages dactylographiées.

* Le candidat pourra admettre tout résultat donné par l'énoncé, même s'il n'a pas su l'établir.

- I -

On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, par $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{C}$) l'espace vectoriel des applications (resp. des applications continues) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application Δ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ en associant à $f \in \mathcal{F}$ l'application $\Delta f \in \mathcal{F}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$
On pose : $\Delta^2(f) = \Delta(\Delta f)$.

I - 1° Etant donné $u \in \mathcal{F}$, résoudre l'équation fonctionnelle : (E) $\Delta f = u$
c'est chercher toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$ vérifiant la condition :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x+1) - f(x) = u(x)$.

a) Montrer que si on connait une solution g de (E), alors la résolution de (E) est ramenée à celle de l'équation $\Delta f = 0$. Caractériser l'ensemble $\mathcal{P}$ des solutions de cette dernière équation.

b) Montrer qu'à toute application φ de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ on peut associer une, et une seule solution de (E) dont φ soit la restriction à $[0,1[$. On montrera que, pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, la restriction de cette solution à $[k,k+1[$ est déterminée par :

$$\forall \xi \in [0,1[,\ k + \xi \mapsto \varphi(\xi) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j+\xi).$$

c) Quelle condition doit vérifier u pour que (E) admette des solutions continues sur $\mathbb{R}_+$?
Cette condition étant remplie, comment doit-on choisir φ pour que la solution de (E) dont la restriction à $[0,1[$ est φ soit continue ?

I - 2° Dans cette question, on adopte : $u(x) = Ax + B$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, $A \neq 0$.

a) Montrer que l'on peut choisir la constante C pour que la solution de (E) déterminée par $\varphi(x) = Cx$ soit continue.

b) Montrer que, pour toute solution f de (E), les points de la représentation graphique dont les abscisses sont de la forme $k + \xi$, où $\xi \in [0,1[$ est fixé et où k décrit $\mathbb{N}$, appartiennent à une parabole.
Trouver les solutions de (E) qui sont des fonctions polynômiales.

I - 3° Dans cette question, on adopte : $u(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Déterminer une solution particulière de (E), et en déduire la solution générale.

I - 4° Dans cette question, on adopte : $u(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, $(A,B,\omega) \in \mathbb{R}^3$, $\omega \neq 0$.

a) En distinguant les cas : $\frac{\omega}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ et $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, déterminer une solution particulière de (E), et en déduire la solution générale.

b) Discuter l'existence de solutions périodiques de (E). En particulier, dire si, dans le cas : $\frac{\omega}{2\pi} \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ il existe des solutions non périodiques.

.../...

I - 5° On étudie l'équation fonctionnelle : $\Delta^2 f = u$, où $u \in \mathcal{F}$ est donnée.

a) Montrer que la solution générale de l'équation $\Delta^2 f = 0$ s'écrit :
$x \longmapsto x\,p(x) + q(x)$, avec $(p,q) \in \mathcal{P}^2$

b) Montrer qu'une solution f de $\Delta^2 f = u$ peut être caractérisée par les restrictions φ et ψ de f et Δf à $[0,1[$. Pour $K \in \mathbb{N}$, expliciter la restriction de la solution à $[k, k+1[$, en utilisant φ et ψ.

c) Etudier l'existence de solutions continues de $\Delta^2 f = u$.

I - 6° On désigne par $\mathcal{D}$ l'opérateur qui à toute application dérivable $f \in \mathcal{F}$ associe l'application dérivée $\mathcal{D}f = f'$, et par U l'opérateur qui à toute application $f \in \mathcal{C}$ associe l'application Uf telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad Uf(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

On pose : $D^2 f = D(Df)$, $U^2 f = U(Uf)$.

a) Vérifier que, pour toute application $g \in \mathcal{F}$ continûment dérivable :
$D(Ug) = U(Dg) = \Delta g$.
Montrer : $\forall f \in \mathcal{C}$ $D^2(U^2 f) = \Delta^2 f$. (1)

b) Vérifier que, pour tous $f \in \mathcal{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+$:

$$Uf(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^x \Delta f(t)dt,$$

et: $$U^2 f(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_x^{x+1} \left(\int_0^u \Delta f(t)dt \right) du$$

Retrouver ainsi la formule (1)

c) On recherche toutes les applications $f \in \mathcal{C}$ vérifiant : $U^2 f = 0$
Montrer qu'il s'agit des applications de la forme : $x \longmapsto xp(x) + q(x)$
où p et q sont des éléments de $\mathcal{P}$ qui vérifient des conditions que l'on précisera (ces conditions font intervenir la continuité et la valeur moyenne sur $[0,1]$).

- II -

A tout $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ on associe l'opérateur Δ_a qui à $f \in \mathcal{F}$ fait correspondre l'application $\Delta_a f \in \mathcal{F}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\Delta_a f(x) = f(x+a) - f(x)$.

On pose : $\Delta_a^2 f = \Delta_a (\Delta_a f)$

II - 1° Montrer que $f \in \mathcal{F}$ vérifie l'équation fonctionnelle :
(E_a) $\Delta_a f = u$ ($u \in \mathcal{F}$ donnée)
si, et seulement si l'application $g : x \longmapsto f(ax)$ vérifie $\Delta g = w$, où $w \in \mathcal{F}$ s'exprime simplement en fonction de u.
En déduire que l'étude faite en -I- permettrait d'étudier (E_a) ; on retiendra que toute solution de (E_a) est caractérisée par sa restriction à $[o,a[$.

II - 2° Dans cette question, on donne $x_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $v \in \mathcal{C}$. A tout $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ on associe l'équation : $\Delta_a f = av$, et on désigne par F_a la solution de cette équation qui coïncide avec φ sur $[o,a[$.
Montrer que $F_a(x_0)$ admet une limite quand a tend vers 0.

II - 3° Dans cette question, on donne $x_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $u \in \mathcal{C}$. A tout $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ on associe l'équation : $\Delta_a f = u$, et on désigne par G_a la solution de cette équation qui coïncide avec φ sur $[o,a[$.

a) Montrer que, pour que $G_a(x_0)$ admette une limite quand a tend vers 0, il est nécessaire que l'intégrale

$$\int_0^{x_0} u(t)dt$$

soit nulle.

b) Etudier successivement les deux cas particuliers :
$x_0 = 2\pi$, $u(x) = \sin x$; $x_0 = 1$, $u(x) = x - \frac{1}{2}$
Que peut-on conclure ?

.../...

- III -

Dans cette troisième partie, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des applications polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (abréviativement appelés polynômes) ; X^n, $n \in \mathbb{N}$, désigne l'application $x \longmapsto x^n$. On définit l'opérateur Δ par : $\forall f \in \mathcal{V} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

III - 1° a) Montrer que, pour tout naturel non nul m, $(\Delta X, \Delta X^2, \ldots, \Delta X^m)$ est une famille libre d'éléments de $\mathcal{V}$.
En déduire que, pour tout naturel n, il existe un unique polynôme P_n vérifiant les deux conditions :

$$\Delta P_n = \frac{X^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_n(0) = 0 \ .$$

Montrer que, pour tout naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{(n+1-k)!} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, expliciter $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$.

b) Pour n naturel non nul, on définit l'application polynôme Q_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q_n(x) = (-1)^{n+1} P_n(1-x).$$

Montrer : $Q_n = P_n$

III - 2° a) En utilisant (2), établir (en raisonnant par récurrence) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad |P_n(x)| \leqslant 1 \ .$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |P_n(x)| \leqslant \frac{1+x^{n+1}}{n!}$;

et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |P_n(x)| \leqslant \frac{1 + (|x| + 1)^{n+1}}{n!} \qquad (3)$

b) A tout couple (x,t) de réels on associe la série numérique de terme général $P_n(x)t^n$. Montrer que si $|t| < 1$, cette série est absolument convergente ; utiliser alors la multiplication des séries pour donner une expression simple du produit :

$$(e^t - 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n\right)$$

III - 3° a) Etablir que, pour tout n naturel non nul, il existe une constante γ_n telle que:

$$P'_n = P_{n-1} + \gamma_n$$

b) Montrer que, pour tout naturel n : $\sum_{k=0}^{n} \frac{P'_k}{(n+1-k)!} = \frac{X^n}{n!}$

Faire des polynômes P'_n une étude parallèle à celle de III - 2° a). On établira, en particulier une majoration analogue à (3).

Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|t| < 1$, le produit $(e^t-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n\right)$ existe et en donner une expression simple. (Il ne sera tenu compte d'aucune solution faisant appel à la convergence uniforme).

c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < 1$, on a :

$$(e^t-1)\left(1 + \sum_{1}^{\infty} \gamma_n t^n\right) = t$$

En déduire les valeurs numériques de γ_1, γ_2 et γ_3 .

:: ::

::::

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail